SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ $4^0 \equiv 1 \pmod 9$

$4^1 \equiv 4 \pmod 9$

$4^2 \equiv 7 \pmod 9$

$4^3 \equiv 1 \pmod 9$

d'où $4^{3p} \equiv 1 \pmod 9$

$4^{3p+1} \equiv 4 \pmod 9$

$4^{3p+2} \equiv 7 \pmod 9$

les restes possibles de la division euclidienne par 9 de 4^n sont 1 ,4,7 .

2°/ on a : $22 \equiv 4 \pmod 9$

$31 \equiv 4 \pmod 9$

d'où : $22^{9n+2} - 31^{3n-1} \equiv 4^{9n+2} - 4^{3n-1} \pmod 9 \equiv 4^{3(3n)+2} - 4^{3(n-1)+2} \pmod 9$

$\equiv 7 - 7 \pmod 9 \equiv 0 \pmod 9$

conclusion : pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^* : 22^{9n+2} - 31^{3n-1} \equiv 0 \pmod 9$

Solution 2 :

1°/

- $2^0 \equiv 1 \pmod 7$; $2^1 \equiv 2 \pmod 7$

  D'où $\forall p \in \mathbb{N}$ on a : $2^{3p} \equiv 1 \pmod 7$

  $2^{3p+1} \equiv 2 \pmod 7$

  $2^{3p+2} \equiv 4 \pmod 7$

  Les restes possibles dans la division par 7 de 2^n sont 1 ,2 , 4

- $3^0 \equiv 1 \pmod 7$ $\quad$ $3^3 \equiv -1 \pmod 7$

  $3^1 \equiv 3 \pmod 7$ $\quad$ $3^6 \equiv 1 \pmod 7$

  $3^2 \equiv 2 \pmod 7$

On a :

$3^{6p} \equiv 1 \pmod 7$; $3^{6p+1} \equiv 3 \pmod 7$; $3^{6p+2} \equiv 2 \pmod 7$

$3^{6p+3} \equiv 6 \pmod 7$; $3^{6p+4} \equiv 4 \pmod 7$; $3^{6p+5} \equiv 5 \pmod 7$

Les restes possibles dans la division par 7 de 3^n sont : 1,2,3,4,5,6.